

Mathematische Algorithmen für das verkürzte Multiplizieren mit mechanischen Rechenmaschinen

1. Einführung:

In der Arithmetik ist das Multiplizieren (*Vervielfachen, Malnehmen*) die dritte der vier Grundrechenarten. Die Multiplikation natürlicher Zahlen entsteht durch das wiederholte Addieren eines gleichen Summanden:

$$a + a + a + a + a + a = 6 \cdot a$$

Auch beim Maschinenrechnen - ausgenommen Maschinen, die mit sogenannten Multiplikations- oder Einmaleinskörpern¹ arbeiten - ist das Multiplizieren eine fortlaufende Addition. Maschinenbedienung und -abläufe werden als bekannt vorausgesetzt.

Das verkürzte Multiplizieren ist eine Weiterentwicklung dieser Rechenart. Die Idee wird dem deutschen Mathematiker, Instrumentenbauer und Astronomen Johann Richter (auch *Johannes Praetorius*, 1537-1616) zugeschrieben², der ab 1571 als Professor für Mathematik an der Universität zu Wittenberg lehrte.

Für die Durchführung einer verkürzten Multiplikation gibt es unterschiedliche Algorithmen, die - je nach Komplexität und Maschinentauglichkeit - auch beim Maschinenrechnen

- ohne automatische Rechenabläufe (Handantriebe)
- mit halbautomatischen Rechenabläufen
- mit vollautomatischen Rechenabläufen

eingesetzt werden.

Generell kann bei allen Multiplikatoren mit Dekadenwerten größer 5 die Anzahl der Arbeitsgänge der Maschinen sinnvoll herabgesetzt werden. Dies geschieht durch das Zwischenschalten subtraktiver Arbeitsgänge: $x \cdot 7 = x \cdot 10 - (x \cdot 3)$

¹ vgl.: Rechnerlexikon, *Die Klassifizierung mechanischer Rechenmaschinen*, Teil 3, Abs. 6 / S. 13

² vgl.: Kistermann; Friedrich, Wilhelm: „Die Rechentechnik um 1600 und Wilhelm Schickards Rechenmaschine“ in: Seck, Friedrich (Hg.): *Zum 400. Geburtstag von Wilhelm Schickard - Zweites Tübinger Schickard-Symposium*, Sigmaringen 1995, S. 248

Hierzu wird z. B. bei Handantrieb die Drehrichtung einer Kurbel geändert oder bei Motor-Antrieb der Minus-Rädersatz des Rechenwerkes automatisch zugeschaltet.

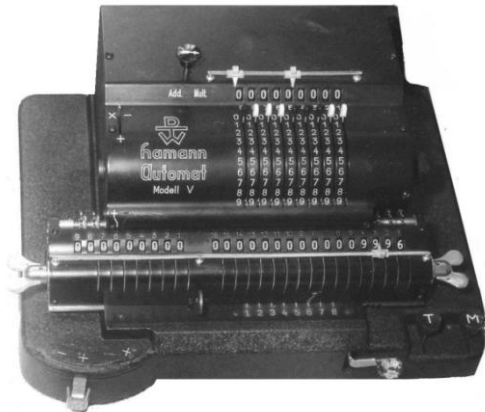


Abb. 1:
Hamann Automat
Modell V,
Vierspezies-Rechner,
Kap. 9 x 9 x 16,
gebaut von
1939-1951,
mit verkürzter
Multiplikation

Die zu erzielende Reduzierung der Arbeitstakte ist abhängig von dem gewählten Algorithmus, der Maschinenkonstruktion und dem Multiplikator selbst.

Eine Grafik von 1954 (Abb. 2) zeigt eine Einsparung von über 40 % der Arbeitstakte bei den vollautomatisch arbeitenden Hamann-Modellen³.

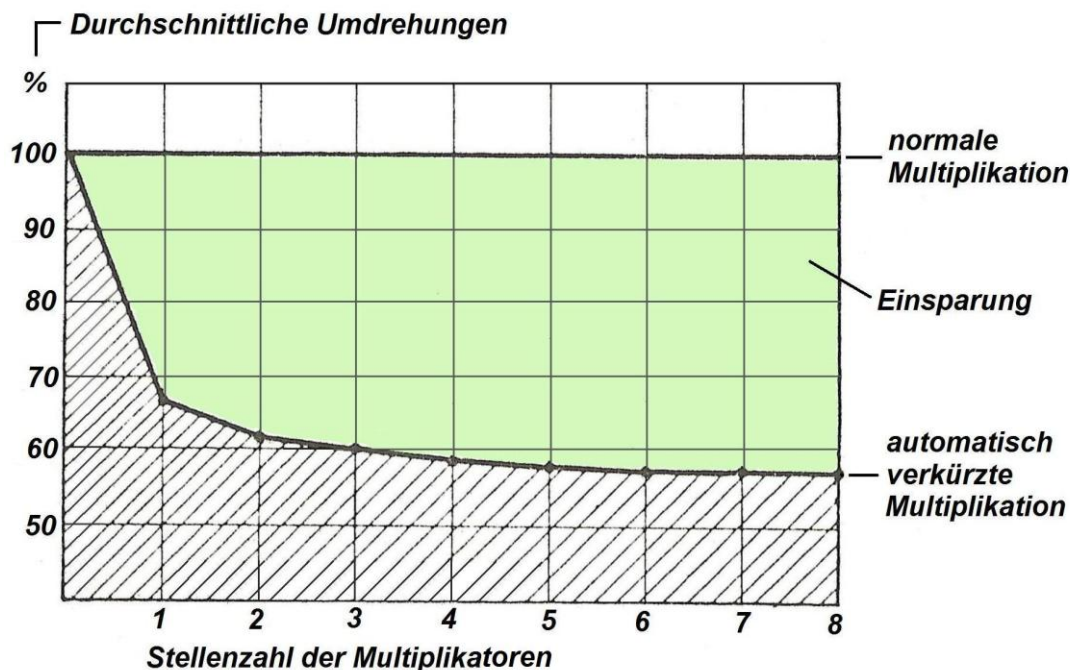


Abb. 2:
Hamann-Vollautomaten: Einsparung in Abhängigkeit von der
Stellenzahl des Multiplikators

³ vgl.: Hennemann, A.: *Die technische Entwicklung der Rechenmaschine*, Aachen 1954, S. 111f

Durch die Herabsetzung der Arbeitstakte wird nicht nur Arbeitszeit gespart. Auch das Material der Maschinen wird geschont und damit die Lebensdauer verlängert.

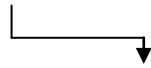
2. Verkürztes Multiplizieren bei Maschinen mit Handantrieb:

Sehr erleichternd für ein sicheres und schnelleres Arbeiten ist eine Zehnerübertragung im Umdrehungszählwerk.

Beim manuellen Multiplizieren wurden zahlreiche *Rechentricks* eingesetzt, den Rechenablauf zu beschleunigen. So war es eine Selbstverständlichkeit, stets den Faktor mit der kleinsten Quersumme zum Multiplikator zu machen.

Faktor 1 x Faktor 2
Multiplikand x Multiplikator > ⁴

Beispiel: **2345 x 6789** erfordern 30 Arbeitstakte



oder **6789 x 2345** erfordern 14 Arbeitstakte

Diese und ähnlich einfache Rechnungen wurden von einem geübten Bediener in der Regel routiniert und ohne großes Nachdenken ausgeführt. So war als Vorbereitung die Bildung einer sogenannten Abarbeitungszahl (s. Abs. 3) nicht immer erforderlich. Wichtig war nur, dass der Multiplikator - wie auch immer - mit möglichst wenigen Kurbelumdrehungen im Umdrehungszählwerk erschien.

Hierzu der Rechenablauf bei einer Sprossenrad-Maschine mit 8-stelligem Umdrehungszählwerk. Die Multiplikation beginnt mit der Einer-Stelle des Multiplikators:

Rechenbeispiel 1: **56789 x 896**

- Das Umdrehungszählwerk wird auf 00000000 gestellt.
- Eingabe des Multiplikanden 56789 in das Einstellwerk
- In der Einer-Stelle vier Minus-Umdrehungen; im Umdrehungszählwerk wird angezeigt:

⁴ vgl.: Bibliographisches Institut (Hg.): *Meyers Großer Rechenduden*, Erster Band, Mannheim 1964, S. 508; allgemein gilt:

1. Multiplikand: Zahl, die mit einer anderen multipliziert werden soll.
2. Multiplikator: Zahl, mit der eine vorgegebene Zahl multipliziert werden soll.

↓
99999996

- Verschiebung des Umdrehungszählwerkes in die Hunderter-Stelle, hier eine Minus-Umdrehung; angezeigt wird

↓
99999896

- Verschiebung des Umdrehungszählwerkes in die Tausender-Stelle, hier eine Plus-Umdrehung; angezeigt wird

↓
00000896

Multiplikator-Bildung:	-	4
eingegeben wurde	-	100
	+	1000
		<u>896</u>

ergibt 896

Anzeige Resultatwerk: 50882944

Insgesamt wurden nur 6 Kurbelumdrehungen ausgeführt, nach herkömmlicher Rechenmethode wären es 23 gewesen.

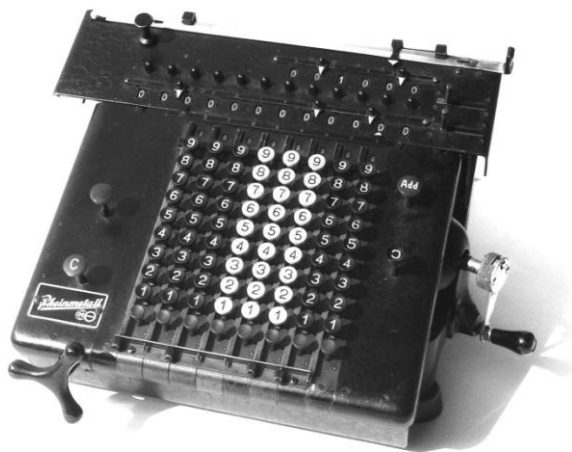


Abb. 3:
Rheinmetall
Modell I e,
Vierspezies-Rechner
von 1933,
Antrieb: Handkurbel

Die Rechnung kann aber auch mit der höchsten Wertstelle des Multiplikators beginnen.

Bei diesem Verfahren wird immer dann eine zusätzliche additive Kurbelumdrehung eingefügt, wenn der Wert der nächstniedrigeren Dekade größer 5 ist. In diesen Dekaden folgen subtraktive Kurbelumdrehungen, die Anzahl entspricht der Ergänzungszahl zu 10. Es sind max. 5 Kurbelumdrehungen pro Dekade auszuführen.

Rechenbeispiel 2: **56789 x 24858**

Umformung: aus Multiplikator **2 4 8 5 8**
 wird **2 5 2 6 2**
 + + - + -

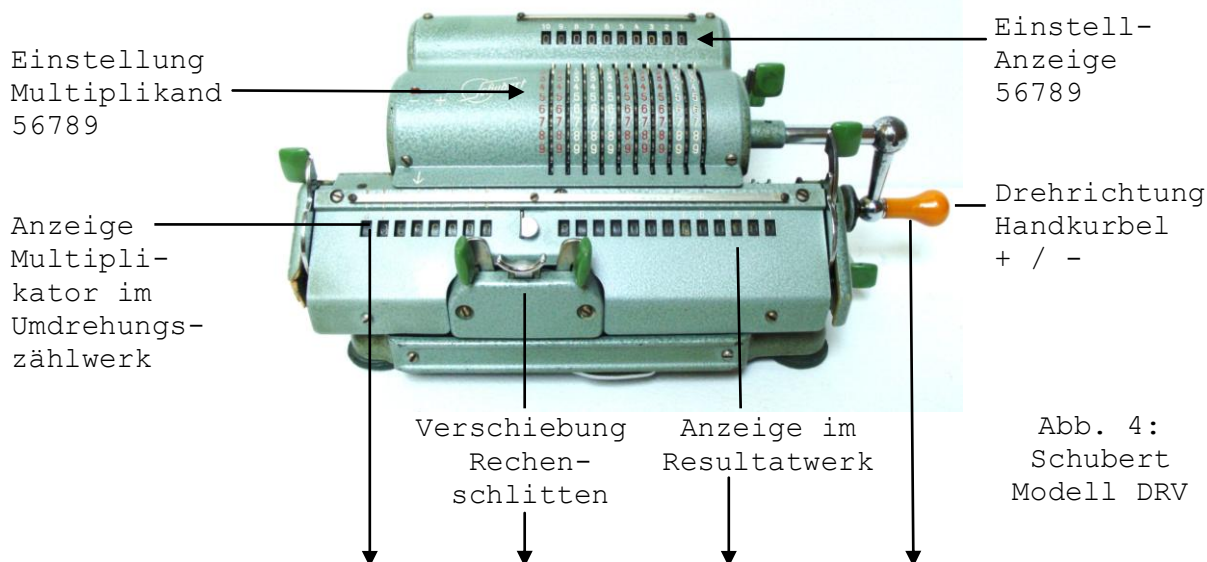


Abb. 4:
 Schubert
 Modell DRV

10000		567890000	+
20000	<	1135780000	+
21000		1192569000	+
22000		1249358000	+
23000		1306147000	+
24000		1362936000	+
25000	<	1419725000	+
24900		1414046100	-
24800	<	1408367200	-
24810		1408935090	+
24820		1409502980	+
24830		1410070870	+
24840		1410638760	+
24850		1411206650	+
24860	<	1411774540	+
24859		1411717751	-
24858		1411660962	-

Resultat ——— ↑

Insgesamt wurden bei dieser Multiplikation 17 Kurbelumdrehungen ausgeführt, nach herkömmlicher Rechenmethode wären es 27 gewesen. Dies entspricht einer Reduzierung um rund 37 %.

3. Verkürztes Multiplizieren bei Maschinen mit Motorantrieb:

Grundlage vollautomatischer, verkürzter Abläufe ist eine Abarbeitungszahl, die aus dem Multiplikator abgeleitet wird. Sie wird in der Regel nach dessen Eingabe und Drücken der Multiplikationstaste selbstständig von dem Multiplikatorwerk gebildet.

Es ist keine Zahl, die ablesbar oder ausdrückbar ist. Dahinter verbirgt sich eine mathematische Umsetzung des eingegebenen Multiplikators in werteproportionale Stellungen der Speicher- und Steuergliedern des Multiplikatorwerks, die - in Abhängigkeit von Algorithmus und Multiplikator - folgende Funktionen steuern:

- die Anzahl der Arbeitstakte
- Bestimmung der positiven oder negativen Arbeitstakte
- Bildung der Ergänzungszahlen zu 10
- Steuern der Plus- / Minus-Rädersätze des Rechenwerks.

Beispiel Algorithmus I:

In einem ersten Schritt werden die einzelnen Dekaden des Multiplikators auf volle Zehner, Hunderter, Tausender, usw. ergänzt, wenn die jeweils niedrigeren Dekaden einen Wert größer 5 aufweisen⁵.

In den ergänzten Dekaden (Ergänzungszahlen zu 10 rot markiert) erfolgen zudem Zehnerüberträge in die nächsthöheren Dekaden.

Beispiel: Der Multiplikator $\begin{matrix} 2 & 7 & 8 & 8 & 3 & 2 & 7 \\ \uparrow & \uparrow & & & & \uparrow & \\ \text{Zehnerübertrag} > & & & & & & \end{matrix}$

ergibt die Abarbeitungszahl $\begin{matrix} 3 & 2 & 2 & 8 & 3 & 3 & 3 \end{matrix}$

Im Zuge der Abarbeitung werden die eingebrachten Ergänzungen zu 10 als subtraktive Arbeitsgänge wieder abgezogen:

⁵ vgl.: Deutsches Reichspatentamt: Patentschrift Nr. 491037 vom 6. Febr. 1927: *Multiplikatorwerk zur Ausführung von abgekürzten Multiplikationen*; Patentinhaber: Mercedes Büromaschinen-Werke A.G. in Benshausen, Post Zella-Mehlis, Thür.

vgl.: Haertel, Peter: „Olympia Dreispezies-Modell 441-016 mit verkürzt arbeitender Multiplikation“ in: *Rechnerlexikon*, April 2015,

$$\begin{array}{r}
+ 3 0 0 0 0 0 0 \\
- \quad 2 0 0 0 0 0 \\
- \quad \quad 2 0 0 0 0 \\
+ \quad \quad \quad 8 0 0 0 \\
+ \quad \quad \quad \quad 3 0 0 \\
+ \quad \quad \quad \quad \quad 3 0 \\
- \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3 \\
\hline
\end{array}$$

ergibt wieder 2 7 8 8 3 2 7

Anzahl der erforderlichen Maschinentakte:

- mit Multiplikator 2 7 8 8 3 2 7 = **37**,
- mit Abarbeitungszahl 3 2 2 8 3 3 3 = **24**,

d. h. die Rechenzeit wird auf rund 65 % herabgesetzt.

Beispiel Algorithmus II:

Hier werden einzelne Dekadenwerte des Multiplikators um den Wert 1 erhöht, wenn der Wert in der jeweils niedrigeren Dekade gleich oder größer 5 ist⁶.

Beispiel: Der Multiplikator 2 7 8 8 3 2 7
Abarbeitungszahl 3 8 9 8 3 3 7

Hierbei haben die unter 5 liegenden Werte eine addierende, höhere Werte dagegen eine subtrahierende Wirkung und werden mit der Ergänzungszahl zu 10 multipliziert:

$$\begin{array}{r}
\quad \quad \quad 3 8 9 8 3 3 7 \\
\quad \quad \quad + - - - + + - \\
ergibt: \quad 3 2 1 2 3 3 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
+ 3 0 0 0 0 0 0 \\
- \quad 2 0 0 0 0 0 \\
- \quad \quad 1 0 0 0 0 \\
- \quad \quad \quad 2 0 0 0 \\
+ \quad \quad \quad \quad 3 0 0 \\
+ \quad \quad \quad \quad \quad 3 0 \\
- \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3 \\
\hline
\end{array}$$

ergibt wieder 2 7 8 8 3 2 7

⁶ vgl.: Eidgenössisches Amt für geistiges Eigentum: Patentschrift Nr. 208976 vom 15. März 1940: *Rechenmaschine*; Patentinhaber: Deutsche Telefonwerke und Kabelindustrie AG., Berlin

Anzahl der erforderlichen Maschinentakte:

- mit Multiplikator 2 7 8 8 3 2 7 = **37**,
- mit Abarbeitungszahl 3 8 9 8 3 3 7 = **17**,

d. h. die Rechenzeit wird auf rund 46 % verkürzt.



Abb. 5:
Precisa
Modell 164-12,
Dreispezies-Maschine
von 1964,
mit verkürzt
arbeitender
Multiplikation

Abbildungsnachweise:

Abb.	Quelle
1	Verlag Peter Basten, Aachen 1954
2	DeTeWe Deutsche Telephonwerke und Kabelindustrie AG., Berlin
3, 4, 5	Verfasser

File: Verkürzte Multiplikation_02

© 2015 Peter Haertel

Rechnerlexikon

Die große Enzyklopädie des mechanischen Rechnens